

中華民國第 56 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 數學科

最佳創意獎

050416

PODO123 (polyomino do math)

學校名稱：國立宜蘭高級中學

作者： 高二 陳佑昕 高二 陳韋綸 高二 李 昕	指導老師： 沈碧照
---	------------------

關鍵詞：連方、質因數、數列命名

摘要

本研究係用「數列命名的方法」作為骨幹，解決或簡化連方圖形(polyominoes, 也稱作連方圖形)的相關問題。連方圖形係指有限個方塊聯通、非空且相連。「數列命名的方法」係指將連方圖形的邊長連續寫成數列。若將連方圖形放在歐幾里得平面上，每個相鄰頂點之間的位移即是被記錄的邊長，故數列中紀錄的邊長含正負號，並且數列滿足兩個充要條件。

為解決使用「數列命名的方法」遇到的問題，目前建立了一套系統、技巧。是將特定圖形，此指連方圖形旋轉、鏡射、圖形合併等等。

研究發現此方法可以解一些連方圖形的問題，例如連方圖形的種類、任意的多個相同的連方圖形是否可以填滿(嵌滿)矩形(平面)。

壹、研究動機

對於生活中的排列、收納等空間運用問題，與俄羅斯方塊的排列和種類(各種連方的數目)有相當程度上的相似。因此，若透過俄羅斯方塊在平面上的放置，也許能夠簡化及解釋其規則。

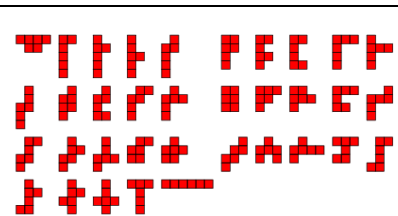
貳、研究目的

- 一、觀察與統整俄羅斯方塊在矩形方格上的填滿問題，以討論相關規則。
- 二、建立討論俄羅斯方塊的數學系統。

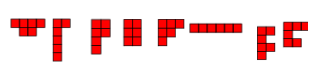
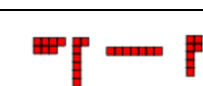
參、研究內容與過程

- 一、觀察與統整俄羅斯方塊在平面方格上的填滿問題。

(一). 俄羅斯方塊的種類有：

		總數
一連方		1
二連方		1
三連方		2
四連方		5
五連方		12
六連方		35
.....		

(二). 其中自身能夠獨自拼成完整矩形的有：

		總數
一連方		1
二連方		1
三連方		2
四連方		4
五連方		3
六連方		8
七連方		4
八連方		6
.....		

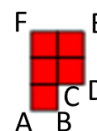
(三). 連方圖形的命名與計算：

觀察以上兩個表格，想到或許能夠用數列命名的方式解釋其規則。如果利用數列命名，可以判斷兩個圖形是否相等，可利用 **NP**(非定長多項式)方法算出連方數增加時有多少種類，也可以將多個圖形沒有縫隙的拼成另一個圖形。

1. 命名：

假設有一個圖形如右

可以任意選定起點，命往右或往上為正，往左或往下為負，先左右後上下，連續取數列。範例中令 **A** 為起點，利用數列(1,1,1,2,-2,-3)作為該圖形的命名。



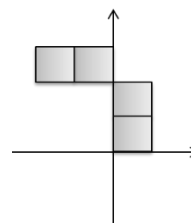
2. 判斷一個數列是否為連方：

假設存在一數列($a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$)，該數列代表一個連方圖形的必要條件包括：

$$(1) \sum_{i=1}^n a_{2i-1} = 0 \wedge \sum_{i=1}^n a_{2i} = 0, a_i \in \mathbb{Z}$$

(2) 數列中任意幾個數，假設是數列中的第 g 項到第 $g+2x$ 項， x 為適當自然數：

$$\begin{aligned} & \text{When } (a_{g+3} + a_{g+5} + a_{g+7} \dots + a_{g+2x+3}) \times (a_{g+1}) < 0 \wedge \\ & (a_{g+2} + a_{g+4} + a_{g+6} \dots + a_{g+2x+2}) \times (a_g) < 0 \\ & \text{if } |a_{g+3} + a_{g+5} + a_{g+7} \dots + a_{g+2x+3}| \geq |a_{g+1}| \\ & \text{then } |a_{g+2} + a_{g+4} + a_{g+6} \dots + a_{g+2x+2}| > |a_g| \end{aligned}$$



否則，將產生如右圖的圖形

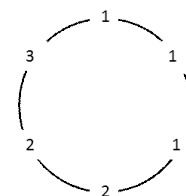
(1,2,-3,1,2,-3)

3. 判斷兩個數列是否代表同一圖形：

在平面座標系上，一個圖形可以被旋轉、鏡射，而在判斷俄羅斯方塊(連方圖形)數量時，就必須判斷多個圖形是否代表的是同一種圖形。透過命名後的數列判斷的方式：

- (1) 數列中的每一個數取絕對值，將該數列排成一個環，判斷比較環是否相等

如上圖，若選定 A 為起點(1,1,1,2,-2,-3)則環如右
若選定 F 為起點(2,-2,-1,-1,-1,3)則環亦相等
此兩環相等，表同一圖形(判斷方式一)。



- (2) 透過該圖形為 t 連方，周長為 m ，奇數項乘積 l_1 ，偶數項乘積 l_2 ，全數列乘積 l ，五個數(t, m, l, l_1, l_2)若相同則表同一圖形(判斷方式二)。

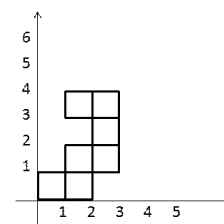
4. 判斷一個數列所代表的圖形為幾連方：

判斷一個圖形為 t 連方，相當於在平面座標系上圖形所圍成的面積為 t 。

計算方法同樣可隨意取圖形一頂點作為原點，並分別以奇數項、偶數項代表平面座標系上的 x 軸、 y 軸：

- (1) 欲知($a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$)的連方數 t 可以以下方法求得。
(2) 舉例而言，假設根據原數列

(2,1,1,3,-2,-1,1,-1,-1,-1,-1,-1)可得的圖形如右圖，則
 $a_2 \times a_1 = 1 \times 2$ 代表四點(0,0),(2,0),(2,1),(0,1)包圍的矩形
(該四點為此矩形頂點)，含符號的面積記為 2。
 $a_4 \times (a_1 + a_3) = 3 \times (2 + 1)$ 代表四點(0,1),(3,1),(3,4),(0,4)包圍的矩形，含符號的面積記為 9。



$a_6 \times (a_1 + a_3 + a_5) = (-1) \times (2 + 1 + (-2))$ 代表四點(0,3),(1,3),(1,4),(0,4)包圍的矩形，含符號的面積記為-1。

.....

$a_{12} \times (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}) = (-1) \times (2 + 1 + (-2) + 1 + (-1) + (-1))$ 代表點(0,1),(0,0)包圍的矩形，含符號的面積記為 0。

此連方數 $t = \sum_{i=1}^6 [a_{2i} \times (\sum_{k=1}^i a_{2k-1})] = 7$ 。

- (3) 因此一般情況可由式子 $\sum_{i=1}^n [a_{2i} \times (\sum_{k=1}^i a_{2k-1})] = t$ 計算數列代表的連方數 t 。

5. 圖形的旋轉與鏡射

- (1) 若兩數列的奇數項彼此互為相反數，表示兩數列所代表的圖形為對 y 軸做鏡射的圖形；若兩數列的偶數項彼此互為相反數，表示兩數列所代表的圖形為對 x 軸做鏡射的圖形。
- (2) 若兩數列分別為 $A(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$ 與 $B(a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_1)$ ，則圖形 B 為圖形 A 順時針旋轉 90 度且 x 軸鏡射(定義原數列奇數項為 x 軸)後的圖形，或圖形 A 逆時針旋轉 90 度且 y 軸鏡射(原數列偶數項)後的圖形。

因此，若要將圖形順時針旋轉 90 度，可將數列中的奇數項均改成其相反數 $-a_{2i-1} \rightarrow a'_{2i-1}$ ， $i \in \mathbb{Z}$ ，再將數列(假設共 n 項)中的各個數往前放置 $a_i \rightarrow a'_{i-1}$ ； $a_1 \rightarrow a'_n$ ， $(2 \leq i \leq n, i \in \mathbb{N})$ 。

同理，若要將逆時針旋轉 90 度，可將數列中的偶數項均改成其相反數，其餘步驟相同。

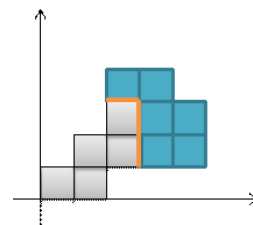
6. 合併圖形

- (1) 存在數列 $A(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ ， $B(b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-2}, b_{n-1}, b_n)$

- (2) 假設兩數列 A 數列中有子數列

$A_t(a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+x-2}, a_{m+x-1}, a_{m+x})$ 與 B 數列中有子數列 $B_u(b_l, b_{l+1}, \dots, b_{l+x-2}, b_{l+x-1}, b_{l+x})$ 為一一對應的數，即 $(b_l, b_{l+1}, \dots, b_{l+x-2}, b_{l+x-1}, b_{l+x}) = \pm(a_{m+x}, a_{m+x-1}, \dots, a_{m+2}, a_{m+1}, a_m)$

則代表兩圖形中有構形一樣(可以合併)的部分，僅因合併時相對位置之故，如右圖兩圖形相交之片段。

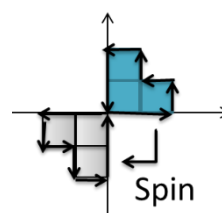


- (3) 將兩數列分別拆為兩不完整的子數列(相接部分及其他)，圖形相加之後的數列，去掉兩數列相同的部分，新數列可表示為

$C(a_1, a_2, \dots, a_{m-1} + b_{2l+x}, b_{l+x+2}, b_{l+x+3}, \dots, b_{l+x+1} + a_{m+x+1}, a_{m+x+2}, a_{m+x+3}, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ 。

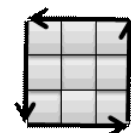
- (4) 反圖形:

反圖形可視為在座標平面上位於相反象限(一與三象限、二與四象限)的圖形(原點相同，考慮其前兩項正負)，或言反圖形互為旋轉 180 度後的圖形，如右圖。加 A 圖形的反圖形，相當於減 A 圖形。



(5) 順(逆)時針:

從起點開始隨數列值行進有其順序，如圖可以箭頭表示(順(反)時針):



在合併圖形時應將兩圖形轉為順逆時針相同的圖形再行相加。(亦可以順逆相反的圖形相減)

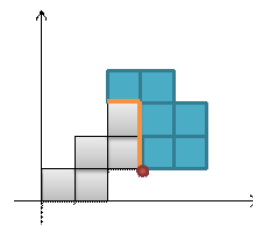
(6) 由於一個圖形的命名實際上可以無限循環，即

$$A(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) \equiv$$

$A(a_4, a_5, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, a_1, a_2, a_3)$ ，因此在進行圖形的合併時，定義上一個數列可以有無限多項。而要簡化計算，可將數列 $B(b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n-2}, b_{n-1}, b_n)$ 改成

$$B'(b_{l+x+1}, b_{l+x+2}, b_{l+x+3}, \dots, b_{n-1}, b_n, b_1, b_2, \dots, b_{l+x-2}, b_{l+x-1}, b_{l+x})$$

。修改後， B' 的起點就在合併圖形的重疊部分的端點上，如右圖上的點即為圖片右側圖形的起點。



(7) 合併時，將修改過的數列相加，併消去相加後其值為 0 的項，例：

$(3, \mathbf{1, -1, 1, -1, -1, -1})$ 和 $(2, -2, -1, \mathbf{1, -1, 1})$ 的其中一種合併(粗體為合併邊(也就是 A 和 B))，將兩個做欲合併處的對

$$(3, \mathbf{1, -1, 1, -1, -1, -1})$$

$$(2, -2, -1, \mathbf{1, -1, 1})$$



應→

上下任取一數列將底數部分左右順序互換

(底線部分為合併時發生重疊的邊，不一定完全等於粗體的構形相同處)。

最後再將左右互換的數列的剩餘項放入兩 $\square$ 之間。

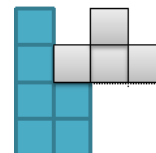
($\square$ 是因為合併而長度有所變化的邊)。

$$\begin{array}{c} \boxed{3, 1, -1, 1, -1, -1} \\ +) \quad \boxed{2, 1, -1, 1, -1, -2} \end{array}$$

$$\hline$$

$$= (4, 2, -3, -1, -1, -1)$$

(8) 若欲將兩圖形可能有空隙的合併(如右圖)，則消去的數列長度 $(x+1)$ 可奇亦可偶。唯偶數時 $|b_l| \neq |a_m| \vee |b_{l+x}| \neq |a_{m+x}|$ 但 $(b_l \times a_m) < 0 \wedge (b_{l+x} \times a_{m+x})$ ，且消去的數列其他片段(除 $b_l, b_{l+x}, a_m, a_{m+x}$)限制仍相同(為一一對應的相反數)。



(9) 有空隙的合併規則和沒空隙的規則本質上相同，

都是將重疊項相加，最後去掉其值為 0 的項，只是 $\square$ 應為重疊項的頭或

尾項。例如(上圖)： $(3, 1, -1, 1, -1, -1, -1)$ 和 $(2, 2, -1, 2, -1, -4)$ 的其中一種合併，將 $(-1, 3, 1, -1, 1, -1, -1)$ 和 $(-1, -4, 2, 2, -1, 2)$ 做欲合併處的對應

→ $(\underline{-1}, \underline{3}, 1, -1, 1, -1, -1, -1)$

$(-1, -4, 2, 2, \underline{-1}, \underline{2})$

上下任取一數列將底數部分左右順序互換。

最後再將左右互換的數列的剩餘項放入兩□之間。

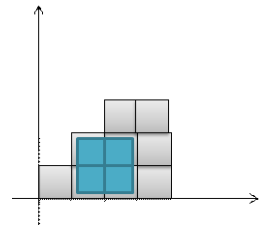
$$\begin{array}{r}
 (\underline{-1}, \underline{3}, 1, -1, 1, -1, -1, -1) \\
 +) (-1, -4, 2, 2, \underline{2}, \underline{-1}) \\
 \hline
 = (\underline{1}, -1, -4, 2, 2, \underline{2}, 1, -1, 1, -1, -1)
 \end{array}$$

7. 圖形的放大縮小

- (1) 若一個圖形所有的項同時加上 u ，數列 $A \rightarrow A' = (A + u)$ ，若此時 A' 也符合連方圖形命名的數列規則，則 A' 為 A 放大 u 單位後的圖形。
- (2) 換言之，一個圖形所有項同時乘以 v ，即數列 $A \rightarrow A' = A \times v$ ，且 A' 的每一項均為非零整數(此時若 A 符合連方圖形命名的數列規則，則 A' 必也符合)，則 A' 圖形即為與(1)中數列共同加減 u 有相同的意義的數列。

8. 判斷一數列 A 是否可以放進另一數列 B (A 是否小於 B)

- (1) 若一圖形 A 可以放進另一圖形 B ，代表圖形 $A \leq B$ ，如右圖。
- (2) 判斷的方式可從兩圖形 A, B 代表的連方數 t_A, t_B 著手。若 $A \leq B$ 則必有 $t_A \leq t_B$ 。
- (3) 若 $t_A = t_B$ ，且 A 要放進 B ，則 A 必等於 B 。
- (4) 若 $t_A < t_B$ ，且 $A < B$ ，則可把數列 A 加入 $t_B - t_A$ 個 $(1, -1, -1, 1)$ 的方格。若其中一種加入方塊後的新數列 $A' = B$ ，則 $A < B$ 。



9. 圖形中的空洞

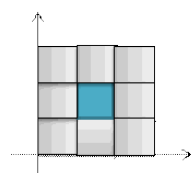
- (1) 若圖形 A 小於圖形 B ，則圖形 A 必可以放入圖形 B ，但 A 不必然可作為圖形 B 中的空洞(空洞如右圖)。
- (2) 圖形 A 可以做為圖形 B 中的空洞的必要條件為圖形 $(A + 2) \leq B$



10. 圖形的座標

一個圖形除了以數列表示外，還須以座標表示。如此，可以解決如右圖的形狀(中間有孔洞)。

- (1) 右圖可視為一 3×3 的方格中心減去一 1×1 的方格，以 x, y 座標表示其起點座標，可將此圖形表為



$$\{(0,0):(3,3,-3,-3)\} \cup \{(0,0):(3,3,-3,-3)\} \cup \{(2,1):(-1,1,1,-1)\} \cup \{(1,2):(1,-1,-1,1)\} \cup \dots$$

- (2) 在判斷此種數列的圖形時，首要判斷其相對位置，故將其中一個取為(0,0)較為方便。

11. 應用

- (1) 假設有數個圖形(可以相同也可不同)，要判斷這些圖形能不能填滿矩形方格平面的方法為：利用數個圖形的合併，做出新的大圖形，再比較大圖形與矩形方格的大小關係(填滿表示該大圖形為一可以填滿一有限矩形方格的矩形)，找出最有效填滿有限矩形方格的方法。而要做出最小的大圖形，令其為 C (原有數個圖形的合併)，可以透過 n_c 的大小得知。即最小的大圖形 C，數列長度 n_c 必為最小(即 $n_c=4$)。
- (2) 利用數列來命名連方圖形，可以計算所有數列中有多少滿足命名連方圖形的規則的數列，而這些數列若均代表不同的圖形，則所有數列數即為連方圖形(俄羅斯方塊)種類的總數。
- (3) 以連方數列長度 n 做討論並以程式執行可以得到連方數 t 在數列長度為 n 的條件下的所有種類總數。
- (4) 下面二、三點將詳述。

二、以圖形命名後的數列討論與窮舉連方圖形(俄羅斯方塊)。

(一). 連方圖形的數列規則與運算

1. 假設一數列($a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$)代表一圖形(n 為數列長度，以下假設的 n 都與此同義)，因此 n 為偶數，且 $\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} a_{2i} = 0$; $\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} a_{2i-1} = 0$ $a_i \in \mathbb{Z}$ 。另外假定欲求連方數為 t (以下假設的 t 皆與此同義)， $t = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} [a_{2i} \times (\sum_{k=1}^i a_{2k-1})]$ 。(a_g 為任意一項)，兩個判斷數列可以形容一個連方圖形的必要條件：

$$\begin{aligned} &\text{When } (a_{g+3} + a_{g+5} + a_{g+7} \dots + a_{g+2x+3}) \times (a_{g+1}) < 0 \wedge \\ &\quad (a_{g+2} + a_{g+4} + a_{g+6} \dots + a_{g+2x+2}) \times (a_g) < 0 \\ &\text{if } |a_{g+3} + a_{g+5} + a_{g+7} \dots + a_{g+2x+3}| \geq |a_{g+1}| \\ &\quad \text{then } |a_{g+2} + a_{g+4} + a_{g+6} \dots + a_{g+2x+2}| > |a_g| \\ &\quad (t, x, y \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

而 $|a_i| \leq g$; $4 \leq n \leq 2g \wedge 2|n|(g \geq 2)$ ，此二式可由判斷數列的兩個必要條件求得。

(1) $t=1$:

當 $t=1$ ， n 只能為 4，且 $|a_i| \leq 1$ 故數列有

(1,1,-1,-1), (1,-1,-1,1)

由上述相同圖形的判斷方法知， $t=1$ 時有唯一數列-

$(1,1,-1,-1)$ 

(2) $t=2$:

當 $t=2$ ， n 只能為 4，且 $|a_i| \leq 2$ 故數列-

$(1,2,-1,-2), (1,-2,-1,2), (-1,2,1,-2), (-1,-2,1,2)$

由上述相同圖形的判斷方法知， $t=2$ 時有唯一數列-

$(1,2,-1,-2)$ 

(3) $t=3$:

當 $t=3$ ， $4 \leq n \leq 6$ ，且 $|a_i| \leq 3$ 故數列

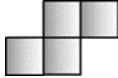
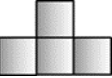
$-(1,3,-1,-3), (1,-3,-1,3), (-1,3,1,-3), (-1,-3,1,3), (1,1,1,1,-2,-2) \dots$

由上述相同圖形的判斷方法知， $t=3$ 時有 2 數列-

$(1,3,-1,-3)$  , $(1,1,1,1,-2,-2)$ 

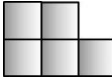
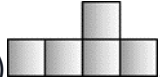
(4) $t=4$:

當 $t=4$ ， $4 \leq n \leq 8$ ，且 $|a_i| \leq 4$ 時由上述相同圖形的判斷方法可知， $t=4$ 時有 5 數列-

$(1,4,-1,-4)$  , $(2,2,-2,-2)$  , $(2,3,-1,-2,-1,-1)$  , $(2,1,1,1,-2,-1,-1,-1)$  , $(3,1,-1,1,-1,-1,-1,-1)$ 

(5) $t=5$:

當 $t=5$ ， $4 \leq n \leq 10$ ，且 $|a_i| \leq 5$ 時由上述相同圖形的判斷方法可知， $t=5$ 時有 8 數列-

$(1,5,-1,-5)$  , $(2,4,-1,-3,-1,-1)$  , $(3,3,-1,-2,-2,-1)$  , $(3,1,-1,1,-2,-2)$  , $(3,1,-1,2,-1,-2,-1,-1)$  , $(4,1,-1,1,-1,-1,-2,-1)$  , $(1,1,1,1,-1,1,-1,-1,-1,1,-1)$  , $(1,1,2,1,-1,1,-1,-1,-1,-2)$ 

2. 由於代表連方圖形的數列必要的規則可以整合成一個不定方程，故可以嘗試用不定方程窮舉數列：

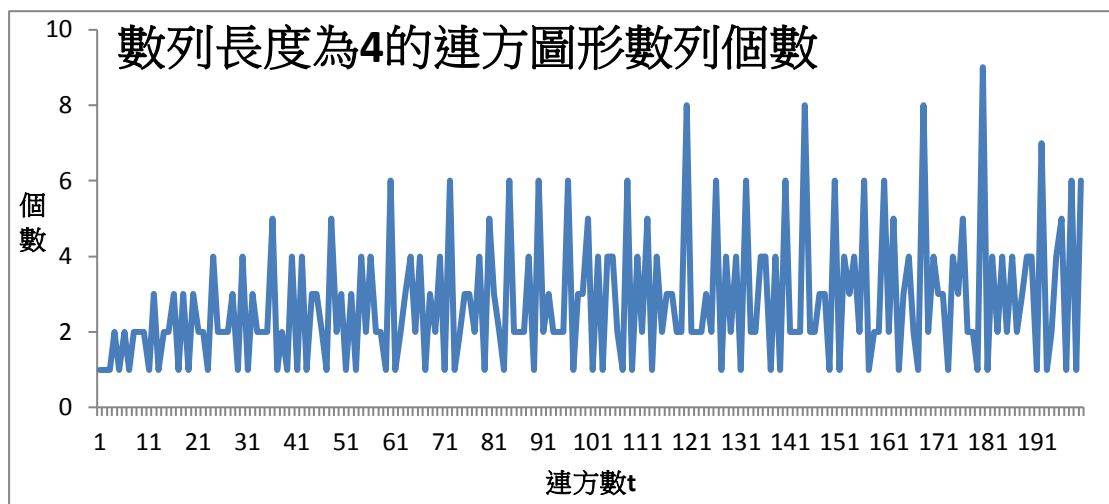
(1) 當數列長度=4:

$$\begin{aligned} \because a_1 + a_3 = 0 \quad \wedge \quad a_2 + a_4 = 0 \quad \wedge \quad a_2(a_1) + a_4(a_1 + a_3) = t \\ \therefore a_1 \times a_2 = t \end{aligned}$$

先填式子中的 a_1 和 a_2 ，再由奇數項合為零，且偶數項和為零算出 a_3 和 a_4 。

t \	1	2	3	4	4	5	6	6	7
a_1	1	1	1	1	2	1	1	2	1
a_2	1	2	3	4	2	5	6	3	7
a_3	-1	-1	-1	-1	-2	-1	-1	-2	-1
a_4	-1	-2	-3	-4	-2	-5	-6	-3	-7

接著，以程式演算出各連方數長度為 4 的數列總數得到以下關係圖：



(2) 當數列長度=6:

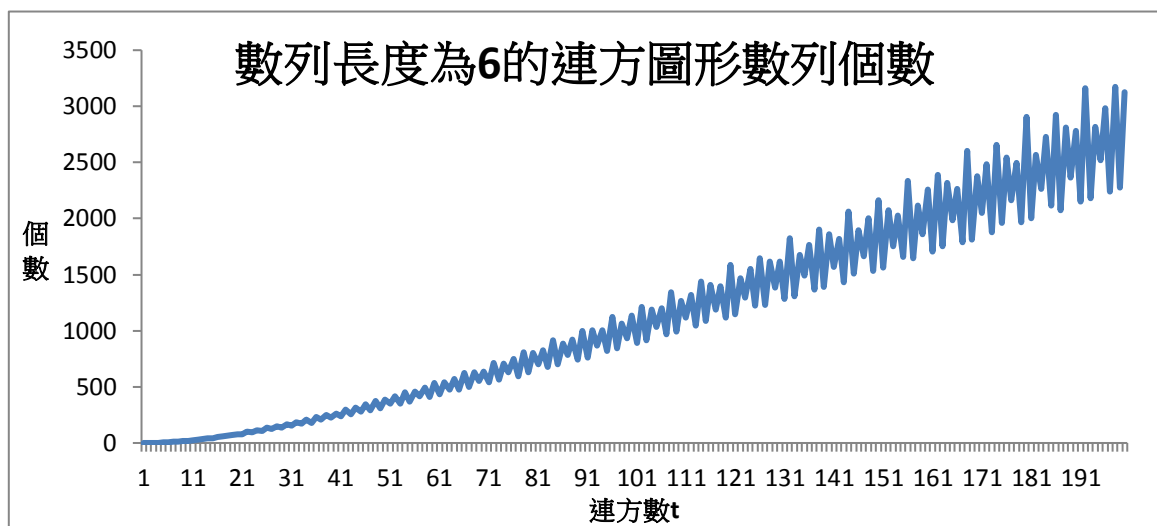
$$\begin{aligned} &\because a_1 + a_3 + a_5 = 0 \quad \wedge \quad a_2 + a_4 + a_6 = 0 \\ &\wedge \quad a_2(a_1) + a_4(a_1 + a_3) + a_6(a_1 + a_3 + a_5) = t \\ &\therefore a_1 \times a_2 - a_4 \times a_5 = t \end{aligned}$$

先填式子中的 a_1 、 a_2 、 a_4 、 a_5 再由奇數項合為零，且偶數項和為零算出 a_3 和 a_6 。

t \	3	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	6
a_1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1
a_2	1	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2
a_3	1	2	1	3	1	2	1	-4	4	3	2	1
a_4	1	1	1	1	2	1	1	-1	1	1	1	2
a_5	-2	-3	-2	-4	-2	-3	-3	3	-5	-4	-4	-2
a_6	-2	-2	-3	-2	-3	-3	-2	-1	-2	-3	-2	-4
t \	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	

a ₁	1	3	1	1	1	1	2	1	1	3	3	
a ₂	3	1	1	1	1	2	1	3	3	1	1	
a ₃	2	-2	5	2	1	4	-1	3	1	-2	-1	
a ₄	1	3	1	2	3	1	5	1	2	4	2	
a ₅	-3	-1	-6	-3	-2	-5	-1	-4	-2	-1	-2	
a ₆	-4	-4	-2	-3	-4	-3	-6	-4	-5	-5	-3	

以程式演算出各連方數長度為 6 的數列總數得到以下關係圖：



三、以圖形命名後的數列討論有限矩形方格的填滿。

(一). 數個任意圖形填滿矩形方格問題之窮舉。

1. 2×2 矩形方格的填滿問題：

方格的填滿問題中，包括數個不同圖形和數個相同圖形之組合的不同命題。唯簡化計算過程，可透過所有欲用來填滿矩形方格的圖形格子數總和 n_{tot} = 有限矩形方格所包含之格子數 n_{sp} ，作為判斷的圖形集合。

(1) 以圖形(1,1,-1,-1)填滿 2×2 矩形方格：

令此一圖形為 A，且此圖形方格數為 n_A 。

$$\because n_{sp} \div n_A = 4 \quad \therefore 4n_A = n_{tot}$$

$$4 \times |A| = \left\{ \begin{array}{l} [(1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1)], \\ [(1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,-1,-1,1)], \\ [(1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,-1,-1,1) + (1,-1,-1,1)] \end{array} \right\}$$

... ..

由(三)-6 的合併規則，得(前兩項先相加)，不能相加的項在下列運算中跳過。

$$= \left\{ \begin{array}{l} (2,1,-2,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) \\ (2,1,-2,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,-1,-1,1) \\ (2,1,-2,-1) + (1,-1,-1,1) + (1,1,-1,-1) \end{array} \right\}$$

... ..

$$= \left\{ \begin{array}{c} (3,1,-3,-1) + (1,1,-1,-1) \\ (3,1,-3,-1) + (1,-1,-1,1) \\ (1,1,1,1,-2,-2) + (1,1,-1,-1) \\ \dots \dots \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} (4,1,-4,-1) \\ (1,1,2,1-3,-2) \\ (1,1,1,2,-1,-1,-1,-2) \\ (2,1,1,1,-2,-1,-1,-1) \\ (1,1,1,1,-3,-1,1,-1) \\ (3,2,-1,-1,-2,-1) \\ (2,2,-2,-2) \\ \dots \dots \end{array} \right\}$$

而由於 2×2 的方格中不可能出現邊長大於 2 的子方塊，

又因上方(三)-2.3 說明的規則，

故只有圖形 $(2,2,-2,-2)$, $(2,1,-2,-1)+(2,1,-2,-1)$ 和 $(2,1,-2,-1)+(1,1,-1,-1)+(1,1,-1,-1)$ 及 $(1,1,-1,-1)+(1,1,-1,-1)+(1,1,-1,-1)+(1,1,-1,-1)$ 等於 Sp。

2. 3×3 矩形方格的填滿問題：

(1) 以圖形 $(1,1,-1,-1)$ 填滿 3×3 矩形方格：

令此一圖形為 B，且此圖形方格數為 n_B 。

$$\because n_{sp} \div n_B = 9 \quad \therefore 9n_B = n_{tot}$$

$$9 \times |B| = \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{c} (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{c} (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right] \\ \dots \dots \end{array} \right\}$$

由(三)-6 的合併規則，得(前兩項先相加)，不能相加的項在下列運算中跳過。

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} (2,1,-2,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{c} (2,1,-2,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right], \\ \left[\begin{array}{c} (2,1,-2,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right] \\ \dots \dots \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \left[\begin{array}{c} (3,1,-3,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right], \right. \\ \left. \left[\begin{array}{c} (3,1,-3,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right], \right. \\ \left. \left[\begin{array}{c} (1,1,1,1,-2,-2) + (1,1,-1,-1) + \\ (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right] \right\}$$

$$= \left\{ \left[\begin{array}{c} (4,1,-4,-1) + \\ (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right], \right. \\ \left[\begin{array}{c} (1,1,2,1-3,-2) + \\ (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right], \right. \\ \left. \left[\begin{array}{c} (1,1,1,2,-1,-1,-1,-2) + \\ (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right] \right\}$$

$$= \left\{ \left[\begin{array}{c} (5,1,-5,-1) \\ + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right], \right. \\ \left[\begin{array}{c} (1,1,3,1,-4,-2) \\ + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right], \right. \\ \left. \left[\begin{array}{c} (1,1,1,2,-2,-3) + \\ + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right] \right\}$$

$$= \left\{ \left[\begin{array}{c} (6,1,-6,-1) \\ + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right], \right. \\ \left[\begin{array}{c} (1,1,4,1,-5,-2) \\ + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right], \right. \\ \left. \left[\begin{array}{c} (2,3,-2,-3) + \\ + (1,1,-1,-1) + (1,1,-1,-1) + \\ + (1,1,-1,-1) \end{array} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{aligned} &\left[\begin{array}{c} (7,1,-7,-1) \\ +(1,1,-1,-1) + \\ +(1,1,-1,-1) \end{array} \right], \\ &\left[\begin{array}{c} (1,1,5,1,-6,-2) \\ +(1,1,-1,-1) + \\ +(1,1,-1,-1) \end{array} \right], \\ &\left[\begin{array}{c} (2,4,-1,-1,-1,-3) \\ +(1,1,-1,-1) + \\ +(1,1,-1,-1) \end{array} \right] \\ &\dots \dots \end{aligned} \right\} \\
&= \left\{ \begin{aligned} &\left[\begin{array}{c} (8,1,-8,-1) \\ +(1,1,-1,-1) \end{array} \right], \\ &\left[\begin{array}{c} (1,1,6,1,-7,-2) \\ +(1,1,-1,-1) \end{array} \right], \\ &\left[\begin{array}{c} (2,4,-2,-4) \\ +(1,1,-1,-1) \end{array} \right] \\ &\dots \dots \end{aligned} \right\} \\
&= \left\{ \begin{aligned} &[(9,1,-9,-1)], \\ &[(1,1,7,1,-8,-2)], \\ &[(2,5,-1,-1,-1,-4)] \\ &\dots \dots \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

而由於 3×3 的方格中不可能出現邊長大於 3 的子方塊，

又因上方(三)-2.3 說明的規則，

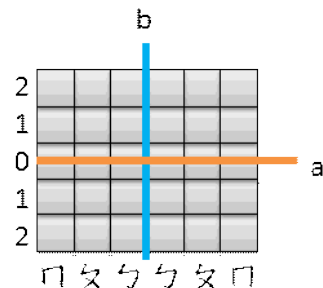
故只有圖形 $(3,3,-3,-3)$, $3 \times (1,3,-1,-3)$, $2 \times (1,3,-1,-3) + 3 \times (1,1,-1,-1)$,
 $2 \times (1,3,-1,-3) + (1,2,-1,-2) + (1,1,-1,-1)$, $2 \times (2,2,-1,-1,-1,-1) + (1,3,-1,-3)$,
 $2 \times (2,2,-1,-1,-1,-1) + 3 \times (1,1,-1,-1)$, $(2,2,-1,-1,-1,-1) + (1,1,1,1,1,-3,-3)$
 $(1,2,-1,-2) + (1,1,-1,-1) + 2 \times (2,2,-1,-1,-1,-1) \dots$ 等於 S_p 。

(二). 數個任意圖形填滿方型平面方格問題討論：

1. 有限矩形方格，可以存在許多小的子圖形，而其中最大的子圖形等於此有限矩形方格。
2. 判斷最後圖形的來源及整理產生最後等於此矩形方格的圖形，可以直接判斷小於平面方格的圖形及找相同的圖形。

(三). 討論數個相同圖形是否可以填滿矩形方格

1. 觀察對稱軸 a 的連方組成性質，可知 0 行的方格數必須對於 a 對稱軸的兩側平分，而 1 行的方格數也必須於兩側平分，以此類推。對於對稱軸 b 也有此性質(列方格數於 b 軸兩側平分...)。
2. 一矩形只會有兩對稱軸平行方格介面(如 a, b)。
3. 若一圖形可組成最小矩形為 S ，則此圖形必可以拼成矩形 nS 。



4. 由 1、2 兩點可知能被同一種非矩形連方圖形組成的矩形方格必為奇數邊×偶數邊，或者是偶數邊×偶數邊。
5. 奇數邊×偶數邊的矩形方格必是由 2 倍的最大相同非矩形連方組成，否則將須使用含有 $1/2$ 方格的非矩形連方來組合。而偶數邊×偶數邊的矩形方格則可以 2 或 4 個的最大相同非矩形連方組成。簡言之，一非矩形連方圖形若不能以 2 或 4 個同樣的圖形拼成一矩形，則此圖形必不能以自身拼成一矩形。
6. 從這些性質可以得知，若相同的兩個圖形可以拼成一個完整矩形，必須在數列中找到對稱的一連續子數列，且該子數列僅比原數列少三項；若相同的四個圖形可以拼成一個完整矩形，則是兩個該圖形先合併後產生的圖形，必須在這個新數列中找到對稱的一連續子數列，且該子數列僅比這個新數列少三項。

(四). 命題、任意三個相同的非矩形連方圖形合併無法拼成矩形

1. 證明：

令此非矩形連方圖形可表示為數列 $A(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$

且不妨使此圖形第一次合併(兩個 A)從 a_2 項和 a_{t+1} 項開始共刪去 x 項。討論各項的關係及合理性，再分開討論圖形有無旋轉的情況。

第一次合併:

$$\frac{\left(\boxed{a_1}, a_2, a_3, \dots, a_{x+1}, \boxed{a_{x+2}}, a_{x+3}, \dots, a_n \right) \left(a_{t+x+2}, \dots, a_n, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, \boxed{a_{t+x+1}}, a_{t+x}, \dots, a_{t+2}, a_{t+1}, \boxed{a_t} \right)}{\left([a_1 + a_{t+x+1}], a_{t+x+2}, \dots, a_n, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, [a_{x+2} + a_t], a_{x+3}, a_{x+4}, \dots, a_n \right)}$$

若欲將三個 A 合併為矩形，只可能滿足 a 、 b 或 c :

- a. 第一次兩個 A 合併的數列長度 $n' = 2n - 1$ (第一次合併時只有接觸到一項且沒有延續其他邊) 且第二次再合入一個 A 的數列長度 $n'' = n + n' - 2y - 2 = 4$ $\therefore n'' = 4 = 3n - 1 - 2y - 2 \Rightarrow 3n - 2y = 7$ 又 $\{[y = n - 4] \vee [y = n - 3] \vee [y = n - 2]\}$ 。將 y 帶入前式，得 $n = -1 \vee 1 \vee 3$ ，由於與 $n \geq 6$ 且 2 整除 n 矛盾，故此種合併方法不可能拼成矩形。

- b. 第一次兩個 A 合併的數列長度 $n' = 2n - 2x - 2$ 且第二次再合入一個 A 的數列長度 $n'' = n + n' - 1 = 4$ (第二次合併時只有接觸到一項且沒有延續

其他邊) $\therefore n'' = 4 = 3n - 2x - 1 \Rightarrow 3n - 2x = 5 \Rightarrow n = 2x + 5$ 由於與 2 整除 n 矛盾，故此種合併方法不可能拼成矩形。

c. 第一次兩個 A 合併的數列長度 $n' = 2n - 2x - 2$ 且第二次再合入一個 A 的數列長度 $n'' = n + n' - 2y - 2 = 4$

$$\therefore n'' = 4 = 3n - 2x - 2y - 4 \Rightarrow 3n - 2x - 2y = 8;$$

$\therefore 3n - 2x - 2y = 8 \wedge \{y = n - 4\} \vee \{y = n - 3\} \vee \{y = n - 2\}$ (根據合併原理)

將 y 帶入前式，得知若要進行三次相同圖形的合併，並使合併後新數列的長度等於 4 (表示該圖形為矩形)，第一次合併的消去部分長度 x 只可能滿足：

$$[2x = n] \vee [2x = n - 2] \vee [2x = n - 4]$$

針對這三種可能性討論：

(1) 當 $[2x = n]$:

若圖形合併時無旋轉，在此合併中

當 $4 \nmid n \wedge 2 \nmid t$ 或當 $4 \nmid n \wedge 2 \nmid t$ 則可由合併原理知：

令 u 為適當正整數，

$$\therefore \begin{cases} a_2 = -a_{t+x} \\ a_3 = -a_{t+x-1} \\ \dots \dots \\ a_{x+1} = -a_{t+1} \end{cases}$$

$$\therefore 2 \mid (x+t) \therefore a_{\frac{(2+x+t)}{2}} = a_{2+u} = -a_{x+t-u} = -a_{2+u}$$

$$\therefore a_{2+u} \neq 0 \therefore a_{2+u} = -a_{2+u} \text{ 與定義矛盾。}$$

當 $4 \nmid n \wedge 2 \mid t$ 或當 $4 \mid n \wedge 2 \nmid t$ 則同樣可根據合併原理知

$$\therefore \begin{cases} a_2 = -a_{t+x} \\ a_3 = -a_{t+x-1} \\ \dots \dots \\ a_{x+1} = -a_{t+1} \end{cases} \Rightarrow \{a_{2+u} = -a_{t+x-u}\}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{when } 2 \leq t \leq x+1 ; \text{ or as the same reason of the above} \\ [a_1 + a_{t+x+1}] = 0 \end{array} \right)$$

$$\therefore \text{if } 2+u=t \Rightarrow u=t+2 ; x+t+u=x+2$$

$$\therefore a_t = -a_{x+2}$$

$$\therefore [a_t + a_{x+2}] = 0, \text{ 與定義矛盾。}$$

若圖形合併時有旋轉，且當 $4 \nmid n \wedge 2 \nmid t$ 或當 $4 \nmid n \wedge 2 \mid t$ ，則第一次的合併式子可改寫為

$$\frac{\begin{pmatrix} \boxed{-a_1} a_2, -a_3, \dots, a_{x+1}, \boxed{-a_{x+2}} a_{x+3} \dots a_n \\ (a_{t+x+2} \dots, a_n, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, \boxed{a_{t+x+1}} a_{t+x}, \dots, a_{t+2}, a_{t+1}, \boxed{a_t}) \end{pmatrix}}{([-a_1 + a_{t+x+1}], a_{t+x+2} \dots, a_n, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, [-a_{x+2} + a_t], a_{x+3}, -a_{x+4}, \dots, a_n)}$$

當 $4 \nmid n \wedge 2 \mid t$ 則可由合併原理知：

令 u 為適當正整數，

$$\begin{cases} a_2 = -a_{t+x} \\ a_3 = a_{t+x-1} \\ a_4 = -a_{t+x-2} \\ a_5 = a_{t+x-3} \\ \dots \dots \\ a_{x+1} = a_{t+1} \end{cases}$$

$\therefore$ when $2 \mid 2+u, 2 \nmid (t+x-u)$; when $2 \nmid 2+u, 2 \mid (t+x-u)$

$$\therefore \begin{cases} a_{2+u} = -a_{t+x-u} \\ \quad \quad \quad \wedge \\ a_{2+u} = a_{t+x-u} \end{cases}$$

當 $4 \nmid n \wedge 2 \nmid t$ 時，可由合併原理知：

$$\therefore \begin{cases} a_2 = -a_{t+x} \\ a_3 = a_{t+x-1} \\ a_4 = -a_{t+x-2} \\ a_5 = a_{t+x-3} \\ \dots \dots \\ a_{x+1} = a_{t+1} \end{cases}$$

$$\therefore 2 \mid \frac{2+t+x}{2} \therefore a_{\frac{2+t+x}{2}} = -a_{\frac{2+t+x}{2}}, \text{ 與定義矛盾。}$$

若圖形合併時有旋轉，且當 $4 \mid n \wedge 2 \nmid t$ 或當 $4 \mid n \wedge 2 \mid t$ ，則第一次的合併式子可改寫為

$$\begin{aligned} & (\boxed{-a_1}, a_2, -a_3, \dots, -a_{x+1}, \boxed{a_{x+2}}, a_{x+3} \dots a_n) \\ & (a_{t+x+2} \dots, a_n, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, \boxed{a_{t+x+1}}, a_{t+x}, \dots, a_{t+2}, a_{t+1}, \boxed{a_t}) \\ & \hline & ([-a_1+a_{t+x+1}], a_{t+x+2}, \dots, a_n, a_1, a_2, \dots, a_{t-1}, [a_{x+2}+a_t], -a_{x+3}, a_{x+4}, \dots a_n) \end{aligned}$$

當 $4 \mid n \wedge 2 \nmid t$ 可由合併原理知：

令 u 為適當正整數，

$$\begin{cases} a_2 = -a_{t+x} \\ a_3 = a_{t+x-1} \\ a_4 = -a_{t+x-2} \\ a_5 = a_{t+x-3} \\ \dots \dots \\ a_{x+1} = a_{t+1} \end{cases}$$

$\therefore$ when $2 \mid 2+u, 2 \nmid (t+x-u)$; when $2 \nmid 2+u, 2 \mid (t+x-u)$

$$\therefore \begin{cases} a_{2+u} = -a_{t+x-u} \\ \quad \quad \quad \wedge \\ a_{2+u} = a_{t+x-u} \end{cases}$$

當 $4 \mid n \wedge 2 \mid t$ 可由合併原理知：

$$\begin{cases} a_2 = -a_{t+x} \\ a_3 = a_{t+x-1} \\ a_4 = -a_{t+x-2} \\ a_5 = a_{t+x-3} \\ \dots \dots \\ a_{x+1} = a_{t+1} \end{cases}$$

並且當圖形進行第二次合併時可表示為

$$\begin{array}{c} (a_w, a_{w+1}, \boxed{a_{w+2}}, a_{w+3}, \dots, -a_{x+1}, a_{x+2}, -a_{x+3}, \dots, a_n, a_1, \dots, \boxed{a_{w-1}}) \\ \hline (\boxed{a_n}, \dots, -a_{x+3}, \boxed{a_{x+2}+a_t}, \dots, a_2, a_1, a_n, \dots \dots, a_{t+x+2}, \boxed{-a_1+a_{t+x+1}}) \\ \hline ([a_{w+2}+a_n], a_w, a_{w+1}, [a_{w-1}+a_1+a_{t+x+1}]) \end{array}$$

令 u 為適當正整數，

$$\because 2x = n$$

因為有 $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ 項新數列與 $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ 項原數列同值異號，

另有 $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ 項新數列與另外 $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ 項原數列同值同號

$$\because a_{w-2} = -a_{t+x+2} = a_{n-t-x+u} = \dots = -a_{w-2}$$

$\therefore$ 在符合合併原理的情況下，必產生 $a_u = -a_u$ 與定義矛盾。

綜合上面三種 x 的可能性，知此種合併方法不可能拼成矩形。

(2) 當 $[2x = n - 2]$:

依同樣方法亦可證得。

(3) 當 $[2x = n - 4]$:

依同樣方法亦可證得。

(4) 總結(1)、(2)、(3)三點，可得知任意三個相同的非矩形連方圖形合併無法拼成矩形。

肆、 結論

一、利用此種圖形命名數列的方法，可以利用 **NP** 或其他方法，求出所有連方圖形的種類。且對於所有不包含空格的圖形，在數列上有完整且嚴謹的敘述模式。

二、圖形命名數列的合併圖形，可用於解決圖形填滿有限矩形方格的問題。

三、由數列合併圖形的運算，我們可以發現，相同方格數的有限矩形方格，可用多種不同的連方合併而成，而使用此運算方式，可以篩檢出合理及扣除對稱的填滿方式。

四、以連方數列長度 n 做討論並以程式執行可以得到連方數 t 在數列長度為 n 的條件下的所有種類總數。(3,4 兩點若不使用此種數列命名的方法都是很難得到的)

五、以連方數列運算證明任意三個相同的非矩形連方圖形合併無法拼成矩形。

伍、 未來展望

一、該圖形命名方法若可以從不同的正多邊形、不同維度方面延伸，也許能夠處理更貼近現實生活問題的應用。

二、若將來有人導出能快速得出一數字之所有質因數的公式，將能以公式求出所有的連方圖形。

陸、 參考資料

一、【摘要資料】

Weisstein, Eric W. "Polyomino." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Polyomino.html>

二、【學位論文】

(一). D. Hugh REDELMEIER . (1981). COUNTING POLYOMINOES: YET ANOTHER ATTACK. Discrete Mathematics ,36 ,191-203

(二). D. Beauquier (1)M. Nivat (2).(1991-12). On translating one polyomino to tile the plane. L.I.T.P., Université Paris VI, 2 Place Jussieu, 75251, Paris Cédex 05, France

(三). Xiangqian Zhou(1) Heping Zhang(2).(2016-6-19). A minimax result for perfect matchings of a polyomino graph. Discrete Applied Mathematics Volume 206, 19 June 2016, Pages 165–171

三、【期刊文章】

JACOB TURNER.(2016-2-19). ON SUBPACKINGS OF POLYOMINO PACKINGS

四、【網頁資料】

(一). <http://mathworld.wolfram.com/Monomino.html> [WolframMathWorld](#)

(二). <http://mathworld.wolfram.com/Domino.html> [WolframMathWorld](#)

(三). <http://mathworld.wolfram.com/Triomino.html> [WolframMathWorld](#)

(四). <http://mathworld.wolfram.com/Tetromino.html> [WolframMathWorld](#)

(五). <http://mathworld.wolfram.com/Pentomino.html> [WolframMathWorld](#)

(六). <http://mathworld.wolfram.com/Hexomino.html> [WolframMathWorld](#)

(七). <http://mathworld.wolfram.com/Heptomino.html> [WolframMathWorld](#)

柒、 附錄

一、數列長度為 4 的連方圖形種類計算程式：

```
# include <stdio.h>
# include <stdlib.h>

main()
{
    int i,j,tot=0 ;
    for(i=1;i<=200;i++)
    {
        for(j=1;j*j<=i;j++)
        {
            if(i%j==0 )
            {
                tot++;
            }
        }

        printf("%d  %d \n",i,tot);
        tot=0;
    }
}
```

二、數列長度為 6 的連方圖形種類計算程式：

```
# include <stdio.h>
# include <stdlib.h>

main()
{
    int i,j,k,l,tot=0;
    for(i=1;i<=200;i++)
    {
        for(j=1;j<=i;j++)
        {
            for(k=1;k<=j;k++)
            {
                for(l=1;l<=i-j;l++)
                {
                    if(j%k==0 && (i-j)%l==0 )
                    {
                        if(k<(i-j)/l )
                        {
                            tot++;
                        }
                    }
                }
            }
        }
    }

    printf("%d %d \n",i,tot);
    tot=0;
}

}
```

【評語】 050416

本作品探討一個有趣的科展問題。作者們也利用序列的概念去得到一些有趣的結果，值得給予肯定。